خیلی سبز ۳۶۰



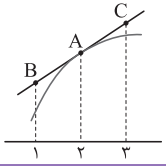
ریاضی ۱۲

اگر نهایی سخت شد

رشتهٔ تجربی

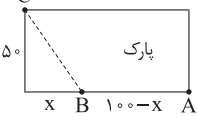
SanjeshCloud

آزمون شبیه‌ساز	ریاضی (۳)	رشته: تجربی	تاریخ آزمون: .....
	◄ نوبت دوم ►	پایهٔ دوازدهم	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه

۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی با ضریب k در راستای محور xها از نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید. ب) تابع $y = \tan x$ در بازهٔ $[0, \pi]$ صعودی اکید است. پ) مجموعهٔ $\{4\} - (\frac{1}{3}, \frac{7}{2})$ یک همسایگی عدد ۳ است.	۰/۷۵
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) اگر f تابعی صعودی اکید باشد، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر آن همواره ..... است. ب) طول نقطهٔ بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ برابر ..... است. پ) دایره‌های $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ با فرض $r > r'$ و خط‌المرکزین d متقاطع‌اند، هرگاه	۰/۷۵
۳	اگر $(fog)(x) = 4x^2 - 4x$ و $f(x) = x^2 + 2x$ باشد، ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.	۱
۴	تابع وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، را به دست آورید.	۱/۲۵
۵	برد تابع کسینوسی $y = a\cos(bx) + c$ برابر $[3, 9]$ و دورهٔ تناوب آن برابر ۳ است. a، b و c را به دست آورید.	۱
۶	معادلهٔ $2\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1$ را حل کنید.	۱/۲۵
۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$ ب) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + [-x]}{(x-1)^2}$ پ) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x}}{\lvert x - 2 \rvert - x}$	۲/۲۵
۸	در مورد تابع f که نمودار آن به صورت مقابل است، می‌دانیم $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \frac{1}{12}$ و $f(2) = 3$. عرض نقاط B و C را به دست آورید. 	۱/۲۵

SanjeshCloud

آزمون شبیه‌ساز	ریاضی (۳)	رشته: تجربی	تاریخ آزمون: .....
	◄ نوبت دوم ►	پایهٔ دوازدهم	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه

۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\frac{2x^3+x}{5x+1})^5$ ب) $g(x)=\sqrt[3]{7x-\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$	۱/۷۵
۱۰	آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=(x+2)\sqrt{4x+1}$ را در بازهٔ $[0,2]$ و آهنگ لحظه‌ای آن را در $x=\frac{3}{4}$ به دست آورید.	۱/۲۵
۱۱	نقاط بحرانی و مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ را در بازهٔ $[-2,3]$ به دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	در شکل مقابل، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A در کنار پارک با سرعت ۳ متر بر ثانیه تا نقطهٔ B و سپس از نقطهٔ B و از داخل پارک با سرعت ۲ متر بر ثانیه به نقطهٔ C برود. x را طوری بیابید که در کم‌ترین زمان ممکن از A به C برود. 	۱/۵
۱۳	اگر $F(7,1)$ مختصات یکی از کانون‌های بیضی به مرکز $(3,1)$ باشد و بیضی از نقطهٔ $M(3,4)$ بگذرد، مطلوب است: الف) طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی ب) خروج از مرکز بیضی	۱/۷۵
۱۴	دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $y=2x$ است. اندازهٔ شعاع این دایره را به دست آورید.	۱
۱۵	در ظرف A، ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و در ظرف B، ۳ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ آبی قرار دارد. به تصادف ۳ مهره از ظرف A و ۲ مهره از ظرف B برداشته و در ظرف خالی C می‌ریزیم، سپس از ظرف C به تصادف مهره‌ای خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که این مهره قرمز باشد.	۲
	«موفق باشید» جمع نمرات	۲۰

SanjeshCloud

پاسخ

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) باید می‌گفت با ضریب $\frac{۱}{k}$ نه ضریب k.

ب) نادرست (۰/۲۵)

تابع $y = \tan x$ در هر بازه‌ای که تعریف‌شده باشد، صعودی اکید است، چون $y = \tan x$ در این بازه تعریف‌نشده است، پس نمی‌تواند در این بازه صعودی اکید باشد.

پ) درست (۰/۲۵)

$(\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۲}) - \{۴\} = (\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۲})$. دقت کنید عدد ۴ در بازهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۲})$ قرار ندارد.

۲ الف) مثبت (۰/۲۵)

چون تابع f صعودی اکید است، پس به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f، اگر $x_۱ < x_۲$ باشد، آن‌گاه $f(x_۱) < f(x_۲)$ ؛ پس:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow x_۲ - x_۱ > ۰, f(x_۱) < f(x_۲) \Rightarrow f(x_۲) - f(x_۱) > ۰$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط}: \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} > ۰$$

ب) $x = ۰$ (۰/۲۵)

$$f(x) = \sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$\Rightarrow f'$ ریشهٔ مخرج: $x = ۰ \in D_f$ $\Rightarrow$ $x = ۰$ طول نقطهٔ بحرانی است.

پ) $r - r' < d < r + r'$ (۰/۲۵)

۳ $f(x) = x^۲ + ۲x \Rightarrow f(g(x)) = g^۲(x) + ۲g(x)$ (۰/۲۵)

بنابر فرض $fog(x) = f(g(x)) = ۴x^۲ - ۴x$ بود؛ پس می‌توان نوشت:

$$g^۲(x) + ۲g(x) = ۴x^۲ - ۴x \xrightarrow{+۱} (g(x)+۱)^۲ = (۲x-۱)^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)+۱ = ۲x-۱ \\ g(x)+۱ = -۲x+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۲x-۲ \quad (۰/۲۵) \\ g(x) = -۲x \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

۴ به جای $f(x)$ ، y قرار می‌دهیم و x را برحسب y می‌یابیم:

$$y = x + \sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow \underbrace{y - x = \sqrt{x^۲+۱}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} y^۲ + x^۲ - ۲xy = x^۲ + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲xy = y^۲ - ۱}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{x = \frac{y^۲-۱}{۲y}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x^۲-۱}{۲x} = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲x} \quad (۰/۲۵)$$

SanjeshCloud

۵ برد توابع $y = a\cos(bx) + c$ و $y = a\sin(bx) + c$ برابر بازهٔ بسته‌ای است که ابتدای آن، مینیمم این توابع یعنی $-|a| + c$ و انتهای آن، ماکزیمم آن‌ها یعنی $|a| + c$ می‌باشد.

$$\begin{cases} |a| + c = ۹ \\ -|a| + c = ۳ \end{cases} \text{(۰/۵)} \Rightarrow c = ۶, |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳ \text{ (۰/۵)}$$

$$\frac{۲\pi}{|b|} = ۳ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۲\pi}{۳} \text{ (۰/۲۵)}$$

۶ **یادآوری**

۱) $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ ۲) $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$

نکته برای حل معادلهٔ مثلثاتی به شکل $\sin u = \cos v$، از زاویهٔ متمم $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ استفاده می‌کنیم. در واقع معادله را به یکی از دو صورت $\sin u = \sin(\frac{\pi}{۲} - v)$ یا $\cos v = \cos(\frac{\pi}{۲} - u)$ نوشته و از رابطه‌های زیر کمک می‌گیریم:

$$\sin u = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u = ۲k\pi + \alpha \\ u = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos\alpha \Rightarrow u = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$\underbrace{(۲\cos^۲ x - ۱) - ۲\sin x\cos x}_{\text{(۰/۲۵)}} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x - \sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = \sin ۲x \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x)}_{\text{(۰/۲۵)}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \underbrace{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}}_{\text{(۰/۲۵)}} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + ۲x \text{ (جواب ندارد) (۰/۲۵)} \end{cases}$$

۷

الف) $\underbrace{\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۱} - ۱}{\sqrt[۳]{x+۱} - ۱} \times \frac{\sqrt{x+۱} + ۱}{\sqrt{x+۱} + ۱} \times \frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{x+۱} + ۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{x+۱} + ۱}}_{\text{(۰/۲۵)}}$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{(x+۱-۱)}(\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{x+۱} + ۱)}{\underbrace{\cancel{(x+۱-۱)} \times (\sqrt{x+۱} + ۱)}_{\text{(۰/۲۵)}}} = \frac{۳}{۲} \text{ (۰/۲۵)}$$

SanjeshCloud

وقتی $x \to 1^-$ ، آن‌گاه $[-x] = -1$ ؛ پس:

ب) $\underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}}_{(0/25)} = \underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}}_{(0/25)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ (0/25)

پ) $\underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2}}{|x|-x}}_{(0/25)} = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+|x|}{|x|-x}}_{(0/25)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-x}{-x-x}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$ (0/25)

۸

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{12} \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{12}}_{(0/25)}$

$\Rightarrow f'(2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}$ (0/25)

❋ معادلهٔ خط مماس: $y - 3 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ (0/25)

$x_B = 1 \xrightarrow{*} y_B = \frac{8}{3}$ (0/25) $\quad x_C = 3 \xrightarrow{*} y_C = \frac{10}{3}$ (0/25)

۹ یادآوری

۱) $y = (f(x))^n \Rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$

۲) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

الف) $f'(x) = 5\Big(\overbrace{\frac{(6x^2+1)(5x+1) - 5(2x^3+x)}{(5x+1)^2}}^{(0/5)}\Big)\underbrace{\Big(\frac{2x^3+x}{5x+1}\Big)^4}_{(0/25)}$ (0/25)

یادآوری

۱) $y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{(f(x))^2}}$

۲) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

SanjeshCloud

ب) $g'(x)=\underbrace{\frac{\overbrace{۷-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}^{(۰/۲۵)}}{۳\sqrt[۳]{(۷x-\sqrt{x})^{۲}}}}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۲}{x^{۲}}}_{(۰/۲۵)}$

۱۰

آهنگ متوسط: $\underbrace{\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}}_{(۰/۲۵)}=۵$ (۰/۲۵)

$$\underbrace{f'(x)=\sqrt{۴x+۱}+\frac{\overbrace{۲}^{\not۴}}{\not۴\sqrt{۴x+۱}}(x+۲)}_{(۰/۵)}$$

$\Rightarrow$ آهنگ لحظه‌ای: $f'(\frac{۳}{۴})=۲+\frac{۲}{۲}(\frac{۳}{۴}+۲)=۴/۷۵$ (۰/۲۵)

۱۱

نکته ۱) برای یافتن نقاط بحرانی تابع چندجمله‌ای f، از تابع f مشتق می‌گیریم و ریشه‌های f' را می‌یابیم، بدیهی است که سر و ته بازهٔ بسته همواره بحرانی است.
۲) برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f، ابتدا طول نقاط بحرانی تابع را یافته و سپس مقدار تابع f را به ازای این نقاط بحرانی به دست می‌آوریم. از این میان، بیشترین مقدار، همان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار، مربوط به مینیمم مطلق تابع f است.

$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow ۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۲$

بنابراین نقاط به طول‌های $x=۰$ ، $x=۲$ ، $x=-۲$ و $x=۳$ بحرانی‌اند. (۰/۵)

هم‌چنین: $f(۰)=۱, f(۲)=-۳, f(-۲)=-۱۹, f(۳)=۱$

در نتیجه مقدار ماکزیمم مطلق f برابر ۱ و مقدار مینیمم مطلق برابر -۱۹ است. (۰/۷۵)

۱۲ از فیزیک می‌دانیم $x=vt$ و در نتیجه $t=\frac{x}{v}$. مسافت بین دو نقطهٔ A و B برابر $۱۰۰-x$ و مسافت دو نقطهٔ B تا C برابر $\sqrt{x^{۲}+۵۰^{۲}}$ می‌باشد؛

پس:

$$t_{کل}=t_{AB}+t_{BC}=\underbrace{\frac{۱۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{x^{۲}+۵۰^{۲}}}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱۰۰}{۳}-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۲}\sqrt{x^{۲}+۲۵۰۰}}_{(۰/۲۵)}$$

SanjeshCloud

$$t' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2500}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+2500}} = \frac{1}{3}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+2500} = 3x \Rightarrow \underbrace{4x^2+10000 = 9x^2}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 10000 \Rightarrow x^2 = 2000 \Rightarrow x = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$$ (۰/۲۵)

۱۳

نکته ۱) قرینهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ نسبت به نقطهٔ $W(\alpha, \beta)$ عبارت است از: $A'(2\alpha - x_0, 2\beta - y_0)$

۲) اگر F و F' کانون‌های بیضی و M نقطهٔ دلخواهی روی بیضی باشد، آن‌گاه طبق تعریف بیضی داریم: $MF + MF' = 2a$

الف) کانون دیگر بیضی یعنی F'، قرینهٔ نقطهٔ F نسبت به مرکز بیضی است:

$$F' = (2\times3-7, 2\times1-1) \Rightarrow F' = (-1,1)$$ (۰/۲۵)

می‌دانیم: $MF + MF' = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(7-3)^2+(4-1)^2} + \sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow 5+5 = 2a \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$ (۰/۲۵)

از طرفی: $FF' = 2c \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$ (۰/۲۵)

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow$ طول قطر کوچک و $\underbrace{2b = 6}_{(۰/۲۵)}$:طول قطر بزرگ $\underbrace{2a = 10}_{(۰/۲۵)}$

ب) $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ (۰/۲۵)

۱۴ مرکز دایره روی قطر $y = 2x$ است، پس مرکز دایره به صورت $O(a, 2a)$ است. (۰/۲۵) فاصلهٔ نقاط $A(0,0)$ و $B(3,1)$ از مرکز دایره یکسان است:

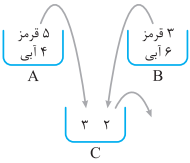
$$\underbrace{OA = OB \Rightarrow \sqrt{a^2+4a^2} = \sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}}_{(۰/۲۵)}$$

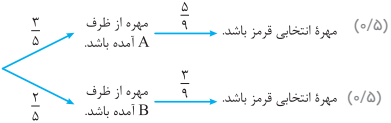
$$\Rightarrow 5a^2 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow a = 1$$ (۰/۲۵)

شعاع دایره $= OA = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}$ (۰/۲۵)

SanjeshCloud

۱۵





$$P(E)=\underbrace{\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۹}}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۹}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱۵+۶}{۴۵}=\frac{۲۱}{۴۵}=\frac{۷}{۱۵}\ (۰/۵)$$